Автор-составитель: Михеева С.С. –
преподаватель ГБОУ ПОО МТК им. В.П. Омельченко

Теоретический материал

Определение. **Логарифмическим неравенством** называется неравенство, **содержащее переменную под знаком логарифма**.

Решение неравенств, содержащих логарифмическую функцию, основано на свойствах этой функции, а так же на методах решения алгебраических неравенств и логарифмических уравнений. При решении неравенства, так же как и уравнений, целесообразно начинать решение с определения ОДЗ и использовать правила равносильного перехода при преобразовании неравенств, так как в отличие от уравнений использовать проверку неравенства практически невозможно.

Основные методы решения логарифмических неравенств

1) метод использования определения логарифма;

2) метод потенцирования (основан на переходе от неравенства, содержащего логарифмы, к неравенству, их не содержащих);

3) метод введения новой переменной (основан на замене логарифмической функции на новую переменную и сведения исходного логарифмического неравенства к алгебраическому 2-ой, 3-ей и др. степени).

Рассмотрим каждый из методов решения логарифмических неравенств более подробно.

I. Метод использования определения логарифма

Решить простейшее логарифмическое неравенство частного вида $\log_a x > b$, в котором знак неравенства будет любого вида $(>, <, \le, \ge)$ можно, не строя графики, а используя определение логарифма, при этом необходимо учитывать не только область определения функции, но и ее свойство монотонности. Записывают решение простейших логарифмических неравенств с помощью систем.

Ниже укажем такие системы для простейших логарифмических неравенств общего вида

Если $0 < a < 1$, то после перехода знак неравенства поменяется

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow l\begin{cases} f(x) > 0 - ОДЗ; \\ f(x) < a^b. \end{cases} \qquad (1)$$

или

Если $a > 1$, то после перехода знак неравенства сохранится

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 - ОДЗ; \\ f(x) > a^b. \end{cases} \qquad (2)$$

Пример 1. Решите неравенство $\log_2 x > 3$

Решение.

Так как $2 > 1$, то знак неравенства сохранится

$$\log_2 x > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 - ОДЗ \\ x > 2^3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x > 8. \end{cases} \Rightarrow x \in (8; +\infty)$$

Ответ: $x \in (8; +\infty)$

Пример 2. Решите неравенство $\log_4 (x+1) > 1$

Решение.

Так как $4 > 1$, то знак неравенства сохранится

$$\log_4(x+1)\ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0-ОДЗ \\ x+1\ge 4^1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1; \\ x\ge 4-1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1; \\ x\ge 3. \end{cases} \Rightarrow x\in[3;\ +\infty)$$

Ответ: $x\in[3;\ +\infty)$

Пример 3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(4+3x-x^2\right)\ge -2$

Решение.

Воспользуемся формулой (5).

Так как $0<\frac{1}{2}<1,$ то знак неравенства поменяется

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(4+3x-x^2\right)\ge -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4+3x-x^2>0-ОДЗ \\ 4+3x-x^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases} \Rightarrow ...$$

Выпишем каждое неравенство системы отдельно и прорешаем:

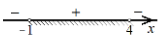
1) ОДЗ

$4+3x-x^2>0$

$4+3x-x^2=0$

$D=b^2-4ac=3^2-4\cdot(-1)\cdot 4=9+16=25;$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-3\pm 5}{-2}=\left[\begin{array}{l} x_1=-1; \\ x_2=4 \end{array}\right.$



$x\in(-1;\ 4)$

2) Решим само неравенство:

$4+3x-x^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$4+3x-x^2\le 4$

$4+3x-x^2-4\le 0$

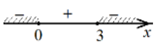
$3x-x^2\le 0$

$3x-x^2=0$

$x(3-x)=0$

$x=0 \qquad 3-x=0$

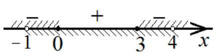
$x=3$



$x\in(-\infty;\ 0]\cup[3;\ +\infty)$

Вернемся к системе и запишем общее решение исходного неравенства:

$$...\Rightarrow \begin{cases} x\in(-1;\ 4) \\ x\in(-\infty;\ 0]\cup[3;\ +\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;\ 0]\cup[3;4)$$



Ответ: $x\in(-1;\ 0]\cup[3;4)$

II. Метод потенцирования

Потенцированием решаются логарифмические неравенства вида $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, где $a>0, a\ne 1,\ f(x)>0,\ g(x)>0.$

Этот метод решения основан на свойстве монотонности логарифмической функции (при $0<a<1$ логарифмическая функция является убывающей, а при $a>1$ возрастающей).

Решение этого вида неравенств записывается в виде системы:

- **если $0 < a < 1,$ то в системе знак неравенства для функций $f(x)$ и $g(x)$ меняется на противоположный:**

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 - ОДЗ; \\ g(x) > 0 - ОДЗ; \\ f(x) < g(x). \end{cases} \qquad (3)$$

- **если $a > 1,$ то в системе знак неравенства для функций $f(x)$ и $g(x)$ знак неравенства сохраняется:**

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 - ОДЗ; \\ g(x) > 0 - ОДЗ; \\ f(x) > g(x). \end{cases} \qquad (4)$$

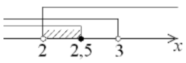
Пример 4. Решите неравенство $\log_5(2x-4) \le \log_5(6-2x)$

Решение.

Так как $5 > 1,$ то знак неравенства сохранится

$$\log_5(2x-4) \le \log_5(6-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 > 0 - ОДЗ; \\ 6-2x > 0 - ОДЗ; \\ 2x-4 \le 6-2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 4; \\ -2x > -6; \\ 2x+2x \le 6+4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2; \\ x < 3; \\ 4x \le 10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2; \\ x < 3; \\ x \le 2{,}5. \end{cases} \Rightarrow x \in (2;\ 2{,}5]$$



Ответ: $x \in (2;\ 2{,}5]$

III. Метод введения новой переменной

Так же как и при решении логарифмических уравнений метод введения новой переменной чаще всего используется в том случае, если в неравенстве встречается несколько логарифмических функций и избавится от них не получается потенцированием, тогда логарифмы выражают через переменную и сводят исходное логарифмическое неравенство к алгебраическому.

Покажем применение метода на конкретных примерах.

Пример 5. Решите неравенство $\log_2^2 x^2 + 5\log_2 x + 1 \le 0$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$, т.е. $x \in (0;\ +\infty).$

Прежде чем ввести новую переменную, преобразуем первое слагаемое неравенства:

$$\log_2^2 x^2 = (\log_2 x^2)^2 \overset{\substack{по\ 5свойству \\ логарифмов}}{=} (2\log_2 x)^2 = 4\log_2^2 x$$

Перепишем исходное неравенство с учетом преобразований:

$4\log_2^2 x + 5\log_2 x + 1 \le 0$

Так как теперь логарифмы отличаются только степенью, то введем замену $\log_2 x = t$ и перепишем исходное неравенство. Получим:

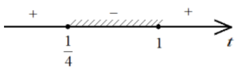
$4t^2 + 5t + 1 \le 0$

Решим неравенство методом интервалов:

$$4t^2-5t+1=0$$

$$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot4\cdot1=25-16=9;$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot4}=\frac{5\pm3}{8}=\left[\begin{array}{l}t_1=1\\ t_2=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$



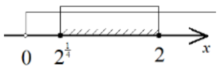
Запишем решение неравенства в виде системы:

$$\left[\begin{array}{l}t\ge\dfrac{1}{4}\\ t\le3\end{array}\right.$$

Вернемся к замене и запишем систему решения исходного неравенства с учетом его ОДЗ:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\log_2 x\ge\dfrac{1}{4}\\ \log_2 x\le3\end{array}\right.\\ x>0\end{array}\right. \overset{\left(\substack{\text{по 2свойству}\\ \text{логарифмов}}\right)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\log_2 x\ge\dfrac{1}{4}\cdot\log_2 2\\ \log_2 x\le3\log_2 2\end{array}\right.\\ x>0\end{array}\right. \overset{\left(\substack{\text{по 5свойству}\\ \text{логарифмов}}\right)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\log_2 x\ge\log_2 2^{\frac{1}{4}}\\ \log_2 x\le\log_2 2^3\end{array}\right.\\ x>0\end{array}\right. \overset{\left(\substack{\text{т.к. } 2>1, \text{ то}\\ \text{знак неравенства}\\ \text{сохраняется}}\right)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\ge2^{\frac{1}{4}}\\ x\le2^3\end{array}\right.\\ x>0\end{array}\right. \Rightarrow x\in\left[2^{\frac{1}{4}};\ 2\right]$$



Ответ: $x\in\left[2^{\frac{1}{4}};\ 2\right]$