Автор-составитель: Михеева С.С. –
преподаватель ГБОУ ПОО МТК им. В.П. Омельченко

Решение типовых задач

Пример 1. Решите уравнение $\log_2 x = 4.$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, т.е. $x \in (0; +\infty).$

$\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16 -$ корень.

Ответ: 16.

Пример 2. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}} x = 2$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, т.е. $x \in (0; +\infty).$

$\log_{\sqrt{3}} x = 2 \leftrightarrow x = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3 -$ корень.

Ответ: 3.

Пример 3. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{4}} x = -1.$

Решение: ОДЗ: $x > 0$, т.е. $x \in (0; +\infty).$

$\log_{\frac{1}{4}} x = -1 \leftrightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4 -$ корень.

Ответ: 4.

Пример 4. Решите уравнение $\log_{0,1578} x = 0.$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, т.е. $x \in (0; +\infty).$ $\log_{0,1578} x = 0 \leftrightarrow x = 0{,}1578^0 = 1 -$ корень.

Ответ: 1.

Пример 5. Решите уравнение $\log_2 (x-1) = 3.$

Решение. ОДЗ: $x - 1 > 0,$

$x > 1$, т.е. $x \in (1; +\infty).$

$$\log_2 (x-1) = 3 \leftrightarrow x - 1 = 2^3$$
$$x - 1 = 8$$
$$x = 9 - \textit{корень}, \textit{т.к.}\ 9 \in ОДЗ.$$

Ответ: 9.

Пример 6. Решите уравнение $\log_5 (x-3)^2 = 4.$

Решение. ОДЗ: $x - 3 \neq 0,$

$x \neq 3$, т.е. $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$

$\log_5 (x-3)^2 = 4$ (по 5 свойству логарифмов)

$$2\log_5 |x-3| = 4 \,|: 2$$
$$\log_5 |x-3| = 2 \leftrightarrow |x-3| = 5^2$$
$$|x-3| = 25$$
$$x - 3 = \pm 25$$
$$x_1 = -25 + 3 = -22 - \textit{корень}, \quad \textit{т.к.}\ -22 \in ОДЗ$$
$$x_2 = 25 + 3 = 28 - \textit{корень}, \quad \textit{т.к.}\ 28 \in ОДЗ.$$

Ответ: $-22;\ 28.$

Пример 7. Решите уравнение $\log_3(2x-10)=1-\log_3 5.$

Решение.

ОДЗ:

$2x-10>0$

$2x>10$

$x>5$

$x\in(5;+\infty)$

Преобразуем уравнение, собрав все логарифмы в левой части, :

$\log_3(2x-10)+\log_3 5=1$

Воспользуемся третьим свойством логарифмов:

$\log_3(2x-10)\cdot 5=1$

$\log_3(10x-50)=1\leftrightarrow 10x-50=3^1$

$10x-50=3$

$10x=3+50$

$10x=53$

$x=5{,}3-\textit{корень}, \textit{т.к.}\ 5{,}3\in \textit{ОДЗ}$

Ответ: $5{,}3.$

Пример 8. Решите уравнение $\log_3 x=\log_3(3x+4)$

Решите уравнение $\log_3 x=\log_3(3x+4)$

Решение.

1) Потенцируем, т.е. решаем уравнение без логарифмов:

$x=3x+4;$

$x-3x=4;$

$-2x=4\,|:(-2)$

$x=-2$

2) Проверяем найденный корень по условиям ОДЗ $\begin{cases} x>0; \\ 3x+4>0. \end{cases}$

Для проверки корня выберем первое неравенство.

Так как при $x=-2$ получаем неверное равенство $-2\not>0$, то $x=-2$ не является корнем.

Ответ: нет корней.

Пример 9. Решите уравнение $\log_5(x^2-3x-5)=\log_5(7-2x)$

Решение.

1) Потенцируем, т.е. решаем уравнение без логарифмов:

$x^2-3x-5=7-2x$

$x^2-3x-5-7+2x=0$

$x^2-x-12=0$

$D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-12)=1+48=49;$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 7}{2}=\left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{array}\right.$$

2) Проверяем найденные корни по условиям ОДЗ $\begin{cases} x^2-3x-5>0; \\ 7-2x>0. \end{cases}$

Для проверки корней выберем второе неравенство.

Так как при $x=-3$ получаем $7-2\cdot(-3)>0\Rightarrow 13>0-$верное равенство, то $x=-3$ является корнем.

Так как при $x=4$ получаем $7-2\cdot 4>0 \Rightarrow -1 \not> 0-$ неверное равенство, то $x=4$ не является корнем.

Ответ: - 3.

Пример 10. Решить уравнение $\log_2(x-3)+\log_2(2-x)=\log_2(x-18)$.

Решение.

Прежде чем потенцировать, мы должны преобразовать исходное уравнение к виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

Воспользуемся для его правой части третьем свойством логарифмов $\log_a x+\log_a y=\log_a x\cdot y$.

Получаем:

$$\log_2(x-3)\cdot(2-x)=\log_2(x-18)$$
$$\log_2(2x-x^2-6+3x)=\log_2(x-18)$$
$$\log_2(-x^2+5x-6)=\log_2(x-18)$$

1) Потенцируем, т.е. решаем уравнение без логарифмов:

$$-x^2+5x-6=x-18$$
$$-x^2+5x-6-x+18=0$$
$$-x^2+4x+12=0$$
$$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot(-1)\cdot 12=16+48=64;$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2\cdot(-1)}=\frac{-4\pm 8}{-2}=\left[\begin{array}{l}x_1=-2\\ x_2=6\end{array}\right.$$

2) Проверяем найденные корни по условиям ОДЗ $\begin{cases}x-3>0;\\ 2-x>0;\\ x-18>0.\end{cases}$

(Обратите внимание: условия для проверки всегда составляются по исходному уравнению).

Для проверки корней выберем первое неравенство.

Так как при $x=-2$ получаем $-2-3>0 \Rightarrow -5 \not> 0-$неверное равенство, то $x=-2$ не является корнем.

Так как при $x=6$ получаем $6-3>0 \Rightarrow 3>0-$ верное равенство, то $x=6$ является корнем.

Ответ: 6.

Пример 11. Решить уравнение $2\log_4^2 x-5\log_4 x+2=0$

Решение:

ОДЗ: $x>0$, т.е. $x\in(0;+\infty)$.

Так как логарифмы имеют одинаковые основания и отличаются только степенью, то введем замену $\log_4 x=y$ и перепишем исходное уравнение. Получим:

$$2y^2-5y+2=0$$
$$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9;$$
$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 3}{4}=\left[\begin{array}{l}y_1=\frac{1}{2}\\ y_2=2\end{array}\right.$$

Вернемся к замене $y=\log_4 x$ и решим совокупность простейших логарифмических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\log_4 x_1=\frac{1}{2}\\ \log_4 x_2=2\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=4^{\frac{1}{2}}\\ x_2=4^2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\sqrt{4}\\ x_2=16\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2\in ОДЗ\\ x_2=16\in ОДЗ\end{array}\right.$$

Ответ: 2; 16.

Пример 12. Решить уравнение $\log^2{}_5 x-\log_{\sqrt{5}} x=3$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$, т.е. $x \in (0; +\infty)$.

Логарифмы в уравнении имеют разные основания. Для того чтобы привести их к одному необходимо воспользоваться 6 свойством (формулой перевода логарифма к новому основанию) или следствием из него.

Воспользуемся 2 следствием из 6 свойства $\left(\log_{a^k} b = \frac{1}{\kappa}\log_a b\right)$:

$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{(5)^{\frac{1}{2}}} x = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5 x = 2\log_5 x$

Перепишем исходное уравнение:

$\log_5^2 x - 2\log_5 x = 3$

Теперь логарифмы в уравнении отличаются только степенью, поэтому введем замену $y = \log_5 x$ и перепишем исходное уравнение. Получим:

$y^2 - 2y = 3$
$y^2 - 2y - 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16;$

$y_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = 3 \end{array}\right.$

Вернемся к замене $\log_5 x = y$ и решим совокупность простейших логарифмических уравнений:

$\left[\begin{array}{l} \log_5 x_1 = -1 \\ \log_5 x_2 = 3 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 5^{-1} \\ x_2 = 5^3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{5} \in ОДЗ \\ x_2 = 125 \in ОДЗ \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{1}{5}$; 125.

Пример 13. Решить уравнение $x^{\log_2 x + 2} = 8.$

Решение:

При записи ОДЗ учтем, что неизвестная переменная x находит и в основании степени, стоящей в левой части уравнения, и внутри логарифма.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2.

Получим:

$\log_2\left(x^{\log_2 x + 2}\right) = \log_2 8$

$\log_2 x^{\log_2 x + 2} = \log_2 2^3$ по 5 свойству логарифмов $\log_a x^p = p\cdot\log_a x$

$(\log_2 x + 2)\cdot\log_2 x = 3\cdot\log_2 2$ по 2 свойству логарифмов $\log_a a = 1$

$\log_2^2 x + 2\log_2 x = 3\cdot 1$
$\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 = 0$

Теперь логарифмы в уравнении имеют одинаковые основания, поэтому введем замену $\log_2 x = k$ и перепишем исходное уравнение. Получим:

$k^2 + 2k - 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16;$

$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l} k_1 = -3 \\ k_2 = 1 \end{array}\right.$

Вернемся к замене $\log_2 x = k$ и решим совокупность простейших логарифмических уравнений:

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x_1 = -3 \\ \log_2 x_2 = 1 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2^{-3} \\ x_2 = 2^1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{8} \in ОДЗ \\ x_2 = 2 \in ОДЗ \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{1}{8}$; 2.