Автор-составитель: Михеева С.С. –
преподаватель ГБОУ ПОО МТК им. В.П. Омельченко

Теоретический материал

Определение. Уравнение, **содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма**, называется **логарифмическим**.

Так, например,

$\log_2(x^2-2x)+2\log_5 x^3=8$ - **логарифмическое уравнение, а**

$\log_2(x^2-2x)+x\log_5 x^3=8$ **не является логарифмическим!**

Решения логарифмического уравнения необходимо начинать с области допустимых значений (ОДЗ). Если возникают трудности с написанием ОДЗ, то после окончания решения необходимо выполнить проверку, подставив найденные корни в исходное уравнение.

Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида $\log_a x=b$ (где $x>0,\ a>0, a\neq 1,\ b-$любое число).

Решить простейшее логарифмическое уравнение вида $\log_a x=b$ можно, используя определение логарифма. Так как логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке $(0;+\infty)$ и принимает на этом промежутке все действительные значения $(-\infty;+\infty)$, то по теореме о корне следует, что данное это уравнение для любого значения b имеет, и притом только единственный, решение $x=a^b$.

Запись можно оформить так:

$\log_a x=b$

Решение: *ОДЗ*: $x>0$

$x=a^b-$ *корень*

Пример 1. Решите уравнение $log_3 x=2$

Решение.

ОДЗ: $x>0$, т.е. $x\in(0;+\infty)$.

$log_3 x=2$;

$x=3^2$;

$x=9$. Ответ: 9.

Пример 2. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{4}} x=-1$.

Решение: ОДЗ: $x>0$, т.е. $x\in(0;+\infty)$.

$\log_{\frac{1}{4}} x=-1$;

$x=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

$x=4$ Ответ: 4.

Итак, **схема решения простейшего логарифмического уравнения:**

$\boxed{\log_a x=b\leftrightarrow x=a^b}$ (для любого b и $x>0,\ a>0, a\neq 1$).

Этим же методом можно решить логарифмическое уравнение вида $\log_a f(x)=b$. Запись решения можно оформить следующим образом способом: $\log_a f(x)=b \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0; \\ f(x)=a^b. \end{cases}$

Пример 3. Решите уравнение $\log_2(x-1)=3$.

$$\log_2(x-1)=3\leftrightarrow\begin{cases} x-1>0; \\ x-1=2^3. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>1; \\ x-1=8. \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (1;+\infty); \\ x = 8+1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (1;+\infty); \\ x = 9. \end{cases} \Rightarrow x = 9 - \textit{корень, т.к. } 9 \in \textit{ОДЗ}.$$ Ответ: 9.

Для решения других видов логарифмических уравнений можно выделить несколько основных методов:

1) **графический метод** (основан на использовании графиков функций);
2) **метод потенцирования**;
3) **метод введения новой переменной**.

Запомните:

Решение любого логарифмического уравнения целесообразно начинать с написания области допустимых значений (ОДЗ). Если существуют трудности с определением ОДЗ, то после окончания решения необходимо выполнить проверку, подставив найденные корни в исходное уравнение.

Все сложные **логарифмические уравнения** принято **сводить к простейшему виду.**

Рассмотрим каждый из методов решения логарифмических уравнений более подробно.

I. Графический метод

Функционально-графический метод применяется в основном для решения простейших логарифмических уравнений вида $\log_a x = f(x)$ (где, $x > 0,\ a > 0, a \neq 1$).

Чтобы решить такое уравнение данным методом необходимо построить графики функций $y = \log_a x$ и $y = f(x)$, а затем найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

Пример 4. Решить уравнение $\log_2 x = 3$.

Решение.

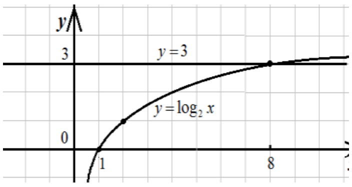

Рис. 1

ОДЗ: $x > 0$.

Изобразим графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 3$ в одной системе координат (рис. 1). Так как графики функций пересекаются только в одной точке (8; 3), то и уравнение $\log_2 x = 3$ будет иметь единственное решение $x = 8$.

Ответ: $x = 8$.

Пример 5. Решить уравнение $\log_{0,4} x = x + 1$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$.

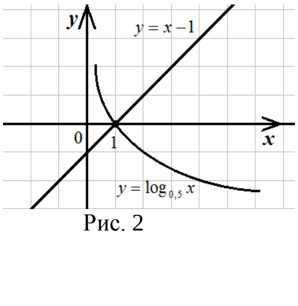

Рис. 2

Изобразим графики функций $y = \log_{0,5} x$ и $y = x - 1$ в одной системе координат (рис. 2). Так как графики функций пересекаются только в одной точке то и уравнение $\log_{0,5} x = x - 1$ будет иметь единственное решение $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

II. Решение логарифмических уравнений методом потенцирования

Потенцированием уравнения называется переход от уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ к уравнению $f(x)=g(x)$.

Запись решения уравнения:

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Решение.

1) Потенцируем, т.е. решаем уравнение $f(x)=g(x)$.

2) Проверяем найденные корни по условиям ОДЗ $\begin{cases} f(x)>0; \\ g(x)>0. \end{cases}$

При выборе этого способа решения, выполняя проверку корней можно делать их подстановку в одно из неравенств (то, которое проще).

Пример 6. Решите уравнение $\log_3 x=\log_3(3x+4)$

I способ записи

Решите уравнение $\log_3 x=\log_3(3x+4)$

Решение.

1) Потенцируем, т.е. решаем уравнение без логарифмов:

$$x=3x+4;$$
$$x-3x=4;$$
$$-2x=4 \,|:(-2)$$
$$x=-2$$

2) Проверяем найденный корень по условиям ОДЗ $\begin{cases} x>0; \\ 3x+4>0. \end{cases}$

Для проверки корня выберем первое неравенство.

Так как при $x=-2$ получаем неверное равенство $-2 \not> 0$, то $x=-2$ не является корнем.

Ответ: нет корней.

Пример 7. Решите уравнение $\log_5(x^2-3x-5)=\log_5(7-2x)$

Решение.

1) Потенцируем, т.е. решаем уравнение без логарифмов:

$$x^2-3x-5=7-2x$$
$$x^2-3x-5-7+2x=0$$
$$x^2-x-12=0$$
$$D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-12)=1+48=49;$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\cdot1}=\frac{1\pm7}{2}=\left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{array}\right.$$

2) Проверяем найденные корни по условиям ОДЗ $\begin{cases} x^2-3x-5>0; \\ 7-2x>0. \end{cases}$

Для проверки корней выберем второе неравенство.

Так как при $x=-3$ получаем $7-2\cdot(-3)>0 \Rightarrow 13>0$ – верное равенство, то $x=-3$ является корнем.

Так как при $x=4$ получаем $7-2\cdot4>0 \Rightarrow -1 \not> 0$ – неверное равенство, то $x=4$ не является корнем.

Ответ: - 3.

III. Метод введения новой переменной

Данный метод используется в том случае, если в уравнении (или неравенстве) встречается несколько логарифмических функций и избавится от них не получается потенцированием, тогда логарифмы выражают через переменную и сводят исходное логарифмическое уравнение к алгебраическому.

Рассмотрим применение метода на нескольких примерах.

Пример 8. Решить уравнение $2\log_4^2 x - 5\log_4 x + 2 = 0$

Решение:

ОДЗ: $x > 0$, т.е. $x \in (0;\ +\infty)$.

Так как логарифмы имеют одинаковые основания и отличаются только степенью, то введем замену $\log_4 x = y$ и перепишем исходное уравнение. Получим:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9;$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = 2 \end{array}\right.$$

Вернемся к замене $y = \log_4 x$ и решим совокупность простейших логарифмических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \log_4 x_1 = \frac{1}{2} \\ \log_4 x_2 = 2 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 4^{\frac{1}{2}} \\ x_2 = 4^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{4} \\ x_2 = 16 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \in ОДЗ \\ x_2 = 16 \in ОДЗ \end{array}\right.$$

Ответ: 2; 16.

Пример 9. Решить уравнение $\log^2{}_5 x - \log_{\sqrt{5}} x = 3$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$, т.е. $x \in (0;\ +\infty)$.

Логарифмы в уравнении имеют разные основания. Для того чтобы привести их к одному необходимо воспользоваться 6 свойством (формулой перевода логарифма к новому основанию) или следствием из него.

Воспользуемся 2 следствием из 6 свойства $\left(\log_{a^k} b = \frac{1}{к}\log_a b\right)$:

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{(5)^{\frac{1}{2}}} x = \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5 x = 2\log_5 x$$

Перепишем исходное уравнение:

$$\log_5^2 x - 2\log_5 x = 3$$

Теперь логарифмы в уравнении отличаются только степенью, поэтому введем замену $y = \log_5 x$ и перепишем исходное уравнение. Получим:

$$y^2 - 2y = 3$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16;$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = 3 \end{array}\right.$$

Вернемся к замене $\log_5 x = y$ и решим совокупность простейших логарифмических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x_1 = -1 \\ \log_5 x_2 = 3 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 5^{-1} \\ x_2 = 5^3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{5} \in ОДЗ \\ x_2 = 125 \in ОДЗ \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$; 125.

Обратите внимание на то, что в процессе решения логарифмического уравнения любым из представленных методов возможно не только **появление посторонних корней** (что обусловлено **расширение ОДЗ** уравнения при его преобразованиях), но и **потеря решений** (что связано с **сужением ОДЗ**). Если в первом случае **посторонний корень исключается его проверкой**, то во втором случае **корень может быть утрачен безвозвратно.**

IV. Метод логарифмирования

Этот метод не является методом решения логарифмических уравнений, но в его основе заложено использование логарифма. В основном он применяется при решении уравнений, содержащих переменную и в основании и в показатели степени. Если при этом в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения надо прологарифмировать по основанию этого логарифма.

Пример 10. Решить уравнение $x^{\log_2 x+2}=8.$

Решение:

При записи ОДЗ учтем, что неизвестная переменная x находит и в основании степени, стоящей в левой части уравнения, и внутри логарифма.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(0;\,1)\cup(1;\,+\infty).$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2.

Получим:

$\log_2\left(x^{\log_2 x+2}\right)=\log_2 8$

$\log_2 x^{\log_2 x+2}=\log_2 2^3$ по 5 свойству логарифмов $\log_a x^p = p\cdot\log_a x$

$(\log_2 x+2)\cdot\log_2 x=3\cdot\log_2 2$ по 2 свойству логарифмов $\log_a a=1$

$\log_2^2 x+2\log_2 x=3\cdot 1$

$\log_2^2 x+2\log_2 x-3=0$

Теперь логарифмы в уравнении имеют одинаковые основания, поэтому введем замену $\log_2 x=k$ и перепишем исходное уравнение. Получим:

$k^2+2k-3=0$

$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16;$

$k_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm4}{2}=\left[\begin{array}{l} k_1=-3 \\ k_2=1 \end{array}\right.$

Вернемся к замене $\log_2 x=k$ и решим совокупность простейших логарифмических уравнений:

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x_1=-3 \\ \log_2 x_2=1 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2^{-3} \\ x_2=2^1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{8}\in ОДЗ \\ x_2=2\in ОДЗ \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{1}{8}$; 2.