Автор-составитель: Михеева С.С. –
преподаватель ГБОУ ПОО МТК им. В.П. Омельченко

Решение типовых задач

Пример 1. Решите неравенство $\log_{0,2} x > 3$

Решение.

Так как $0 < 0,2 < 1$, то знак неравенства поменяется

$$\log_{0,2} x > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 - ОДЗ \\ x < 0,2^3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x < 0,008. \end{cases} \Rightarrow x \in (0;\ 0,008)$$

Ответ: $x \in (0;\ 0,008)$

Пример 2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) \le -2$

Решение.

Так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, то знак неравенства поменяется

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) \le -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 > 0 - ОДЗ \\ 2x-5 \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 5; \\ 2x \ge 3^2 + 5. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2,5; \\ 2x \ge 14. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2,5; \\ x \ge 7. \end{cases} \Rightarrow x \in [7;\ +\infty).$$

Ответ: $x \in [7;\ +\infty)$

Пример 3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(4+3x-x^2) \ge -2$

Решение.

Так как $0 < \frac{1}{2} < 1$, то знак неравенства поменяется:

$$\log_{\frac{1}{2}}(4+3x-x^2) \ge -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4+3x-x^2 > 0; \\ 4+3x-x^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases};$$

Выпишем каждое неравенство системы отдельно и решим их:

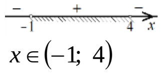
1) первое неравенство - это ОДЗ неравенства:

$4+3x-x^2 > 0$

$4+3x-x^2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot(-1)\cdot 4 = 9+16 = 25;$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2\cdot(-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2} = \left[\begin{array}{l} x_1 = -1; \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$



$x \in (-1;\ 4)$

2) Решим само неравенство:

$4+3x-x^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$4+3x-x^2 \le 4$

$4+3x-x^2-4 \le 0$

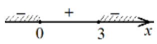
$3x-x^2 \le 0$

$3x-x^2 = 0$

$x(3-x) = 0$

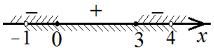
$x = 0 \qquad 3-x=0$

$\qquad\qquad x = 3$



Вернемся к системе и запишем общее решение исходного неравенства:

$$\ldots \Rightarrow \begin{cases} x \in (-1;\ 4) \\ x \in (-\infty;\ 0] \cup [3;\ +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (-1;\ 0] \cup [3;4)$$



Ответ: $x \in (-1;\ 0] \cup [3;4)$

Пример 4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \le \log_{\frac{1}{3}}(14-x)$

Решение.

Так как $0 < \dfrac{1}{3} < 1,$ то знак неравенства меняется

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \le \log_{\frac{1}{3}}(14-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 - ОДЗ; \\ 14-x > 0 - ОДЗ; \\ x-2 \ge 14-x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2; \\ -x > -14; \\ x+x \ge 14+2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2; \\ x < 14; \\ 2x \ge 16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2; \\ x < 14; \\ x \ge 8. \end{cases} \Rightarrow x \in [8;\ 14)$$

Ответ: $x \in [8;\ 14)$

Пример 5. Решите неравенство $\lg x + \lg(45-x) < 2 + \lg 2$

Решение.

Прежде чем подберем метод решения, преобразуем отдельно левую и правую части, используя свойства логарифмов:

$$\lg x + \lg(45-x) \overset{\text{по 3свойству логарифмов}}{=} \lg x(45-x) = \lg(45x - x^2)$$

$$2 + \lg 2 = 2\cdot 1 + \lg 2 \overset{\text{по 2свойству логарифмов}}{=} 2\cdot \lg 10 + \lg 2 \overset{\text{по 5свойству логарифмов}}{=} \lg 10^2 + \lg 2 \overset{\text{по 3свойству логарифмов}}{=} \lg 100\cdot 2 = \lg 200$$

Перепишем исходное неравенство с учетом преобразований:

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200$$

Данное неравенство можно решить методом потенцирования по формуле (4). Записывая ОДЗ, помним, что функции берутся из исходного неравенства:

Так как $10 > 1,$ то знак неравенства сохранится

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 - ОДЗ; \\ 45 - x > 0 - ОДЗ; \\ 45x - x^2 < 200. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0; \\ -x > -45; \\ -x^2 + 45x - 200 < 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x < 45; \\ x^2 - 45x + 200 > 0. \end{cases} \Rightarrow \ldots$$

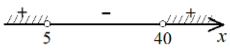
Выпишем отдельно и решим последнее неравенство системы методом интервалов:

$x^2-45x+200>0$

$x^2-45x+200=0$

$D=b^2-4ac=(-45)^2-4\cdot1\cdot200=2025+800=1225;$

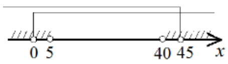
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-45)\pm\sqrt{1225}}{2\cdot1}=\frac{45\pm35}{2}=\left[\begin{array}{l}x_1=5;\\x_2=40\end{array}\right.$



$x\in(-\infty;5)\cup(40;+\infty)$

Вернемся к системе и запишем общее решение исходного неравенства:

$$\ldots\Rightarrow\begin{cases}x>0;\\x<45;\\x\in(-\infty;5)\cup(40;+\infty).\end{cases}\Rightarrow x\in(0;5)\cup(40;45)$$



Ответ: $x\in(0;5)\cup(40;45)$

Пример 6. Решите неравенство $\log^2_{\frac{1}{2}}(3x+1)\ge\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)+6$

Решение.

ОДЗ: $3x+1>0\Rightarrow x>-\frac{1}{3}$, т.е. $x\in\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Так как логарифмы отличаются только степенью, то введем замену $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)=t$ и перепишем исходное неравенство. Получим:

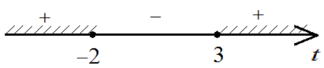
$t^2-t-6\ge0$

Решим неравенство методом интервалов:

$t^2-t-6=0$

$D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25;$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{1\pm5}{2}=\left[\begin{array}{l}t_1=-2\\t_2=3\end{array}\right.$



Запишем решение неравенства в виде системы:

$\left[\begin{array}{l}t\le-2\\t_2\ge3\end{array}\right.$

Вернемся к замене и запишем систему решения исходного неравенства с учетом его ОДЗ:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)\le -2\\ \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)\ge 3\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \overset{\left(\substack{\textit{по 2 свойству}\\ \textit{логарифмов}}\right)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)\le -2\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}\\ \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)\ge 3\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \overset{\left(\substack{\textit{по 5 свойству}\\ \textit{логарифмов}}\right)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)\le \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\\ \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)\ge \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \overset{\left(\substack{\textit{т.к. } 0<\frac{1}{2}<1, \textit{ то}\\ \textit{знак неравенства}\\ \textit{меняется}}\right)}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}3x+1\le 2^{2}\\ 3x+1\ge \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}3x\le 4-1\\ 3x\ge \dfrac{1}{8}-1\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}3x\le 3\\ 3x\ge -\dfrac{7}{8}\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge -\dfrac{7}{24}\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow x\in\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{7}{24}\right]\cup[1;+\infty)$$